

Dans cette séance on va voir

- (i) la notion d'orthogonalité
- (ii) la notion de famille orthogonale et orthornormée
- (iii) la notion de complément orthogonal $\rightarrow$ lien avec $\text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$
- (iv) la définition abstraite de produit scalaire

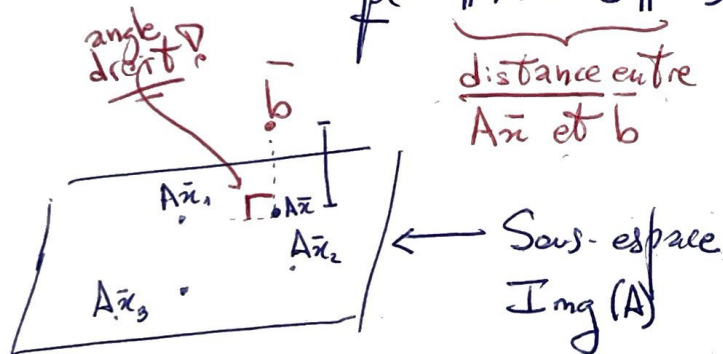
et brise
orthogonalité
et
orthornormée

D'abord un peu de motivation $\rightarrow$ pourquoi étudier "distances" et "orthogonalité"?

① Souvent, on va rencontrer des SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ incompatibles

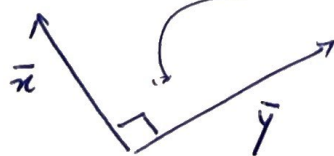
Comme on ne peut pas les résoudre on va faire le suivant:

"chercher $\bar{x}$ tel que $\|A\bar{x} - \bar{b}\|$ soit la plus petite possible"



② Dans ce cas, $A\bar{x} - \bar{b}$ est orthogonal à $\text{Im}(A)$

Définition 12.10 Étant donné $\bar{x}$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, on dit que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$. On notera dans ce cas $\bar{x} \perp \bar{y}$.



Exemple 12.11

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{y}$ sont orthogonaux.

Fait

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ ssi $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

(Preuve) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}$
 $= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$

Donc l'équivalence suit. □

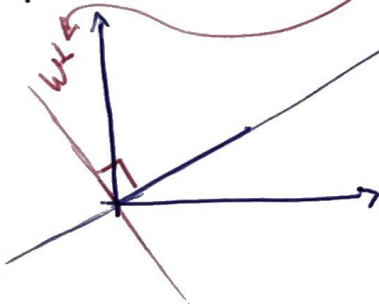
Définition 12.12 Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$, on définit

$$W^\perp := \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \text{ pour tout } \vec{w} \in W \}$$

et on l'appelle complément orthogonal de W.

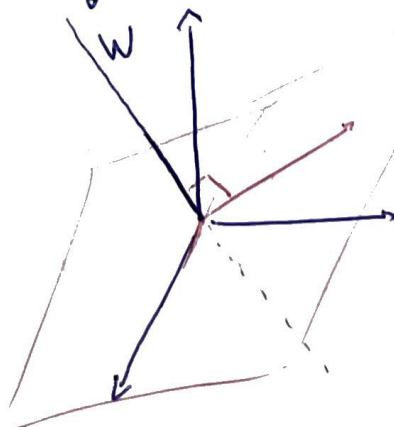
Exemple 12.13*

Pour $n=2$



droite

Pour $n=3$



$W^\perp \leftarrow$ plan

PROPRIÉTÉS DU COMPLÉMENT ORTHOGONAL

62

Proposition 15

- (1) $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
- (2) $(W^\perp)^\perp = W$
- (3) $\dim W + \dim W^\perp = n$

(Preuve) (1) On voit bien que $0 \in W^\perp$, car $0 \cdot \bar{x} = 0$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

En outre, si $\bar{v}, \bar{v}' \in W^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\bar{v} + \lambda \bar{v}') \cdot \bar{w} = \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}}_{=0} + \lambda \underbrace{\bar{v}' \cdot \bar{w}}_{=0} = 0, \forall \bar{w} \in W$,
ce qui nous donne que $W^\perp$ est SEV de $\mathbb{R}^n$.

(2) $(W^\perp)^\perp \supseteq W$

Si $\bar{w} \in W$, alors par définition $\bar{w} \cdot \bar{v} = 0, \forall \bar{v} \in W^\perp$, ce qui implique que $\bar{w} \in (W^\perp)^\perp$.

$$W = (W^\perp)^\perp$$

On utilise (3). Comme $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ et

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) \stackrel{(3)}{=} n = \dim(W^\perp) + \dim((W^\perp)^\perp)$$

alors $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$. L'inclusion $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ nous dit alors que $W = (W^\perp)^\perp$.

(3) Sera démontré dans les exercices.

□

Comment calculer $W^\perp$ en général?

(1) Calculer une base $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ de W

(2) Pour chaque $\bar{w}_i \rightarrow$ EQUATION $\bar{x} \cdot \bar{w}_i = w_{i,1}x_1 + \dots + w_{i,n}x_n = 0$

$$\begin{pmatrix} w_{1,1} \\ \vdots \\ w_{i,1} \\ \vdots \\ w_{i,n} \end{pmatrix}$$

$$(3) W^\perp = \text{Ker} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_k \end{bmatrix}^T = \text{Ker} \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k,1} & \dots & w_{k,n} \end{pmatrix}$$

Le résultat qui justifie cette méthode est

Lemme 16 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ une base de W . Alors $\bar{v} \in W^\perp$ ssi $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \bar{v} \cdot \bar{w}_2 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_n = 0$.

(Preuve) $\Rightarrow$) C'est clair, vu que $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n \in W$.

$\Leftarrow$) On va montrer que $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \in W$, si $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_n = 0$.

Or, comme $\bar{w} \in W$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n$$

En conséquence

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) = \alpha_1 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_n}_{=0} = 0$$

et donc $\bar{v} \in W^\perp$. □

Cas intéressant $\rightarrow$ $\{ \text{Col}(A) \text{ et } \text{Lgn}(A) \}$!

Théorème 12.18 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, alors

$$(a) \text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$$

$$(b) \text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

(Preuve) On écrit $A = \begin{pmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix}$ avec $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}^n$.

Alors, pour (a)

$$\bar{v} \in \text{Lgn}(A)^\perp \Leftrightarrow \bar{v} \cdot l_i = 0, \forall i = 1, \dots, m \Leftrightarrow l_i^T \cdot \bar{v} = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \bar{v} = \mathbf{0}.$$

Pour (b), on note que $\text{Col}(A) = \text{Lgn}(A^T)$ et donc

$$\text{Col}(A)^\perp = (\text{Lgn}(A^T))^\perp \stackrel{(a)}{=} \text{Ker}(A^T).$$

□

Définition 12.19

Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite

• orthogonale si $\bar{w}_i \perp \bar{w}_j$ pour tout $i \neq j$.

• orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et $\|\bar{w}_i\| = 1$ pour tout i .

Exemple 12.20

$\mathcal{B}_{can} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ est une famille orthonormée.

RK. 12.21

Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ est une famille orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$, alors

$\left\{ \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \dots, \frac{\bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|} \right\}$ est famille orthonormée.

normalisation de $\mathcal{F}$

Deux propriétés importantes

(Lemme 17) (i) Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ orthogonale $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre
et
 $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$

(Thm. 12.23) (i) Si $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base de $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \forall \bar{w} \in W$
et elle est orthogonale $\Rightarrow$
$$\bar{w} = \underbrace{\frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}}_{\text{coordonnées de } \bar{w} \text{ relatives à } \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}} \cdot \bar{w}_1 + \dots + \underbrace{\frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2}}_{\text{coordonnées de } \bar{w} \text{ relatives à } \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}} \cdot \bar{w}_n$$

(Preuve) (i) Si $\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n = 0$, alors on fait

$$0 = \bar{w}_i \cdot 0 = \bar{w}_i \cdot (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) = \underbrace{\alpha_1 \bar{w}_i \cdot \bar{w}_1}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i}_{\neq 0 \text{ car } \bar{w}_i \neq 0} + \dots + \underbrace{\alpha_n \bar{w}_i \cdot \bar{w}_n}_{=0} = \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i$$

Ce qui implique $\alpha_i = 0$. Alors $\mathcal{F}$ est libre.

(2) Si

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n$$

alors

$$\begin{aligned} \bar{w}_i \circ \bar{w} &= \bar{w}_i \circ (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_i \bar{w}_i + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) \\ &= \alpha_1 \underbrace{\bar{w}_i \circ \bar{w}_1}_{=0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\bar{w}_i \circ \bar{w}_i}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\bar{w}_i \circ \bar{w}_n}_{=0} \\ &= \alpha_i \bar{w}_i \circ \bar{w}_i = \alpha_i \|\bar{w}_i\|^2 \end{aligned}$$

ce qui nous dit que

$$\alpha_i = \frac{\bar{w}_i \circ \bar{w}}{\|\bar{w}_i\|^2} = \frac{\bar{w} \circ \bar{w}_i}{\|\bar{w}_i\|^2}, \forall i.$$

□

Définition du produit scalaire abstrait

Soit V un espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application qui associe un nombre réel $(u|v)$ à toute paire u, v d'éléments de V , telle que

Par (PS.1), il suffit de demander une seule de ces deux identités !

(PS.1) $(u|v) = (v|u), \forall u, v \in V$

(PS.2) $(u + \lambda u' | v) = (u|v) + \lambda(u'|v)$ et $(u | v + \lambda v') = (u|v) + \lambda(u|v')$
 $\forall u, u', v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

(PS.3) $(u|u) \geq 0 \forall u \in V$ et $(u|u) = 0$ ssi $u = 0_V$

Exemple Pour $V = \mathbb{P}_2$, on définit le produit scalaire

$$(p|q) = p(0) \cdot q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \forall p, q \in \mathbb{P}_2$$

On vérifie que c'est vraiment un produit scalaire. En effet (PS.1) est clair. Pour (PS.2), on note que $(p_1 + \lambda p_2 | q) = (p_1 + \lambda p_2)(0)q(0) + (p_1 + \lambda p_2)(1)q(1) + (p_1 + \lambda p_2)(2)q(2)$
 $= (p_1(0)q(0) + p_1(1)q(1) + p_1(2)q(2)) + \lambda(p_2(0)q(0) + p_2(1)q(1) + p_2(2)q(2)) = (p_1|q) + \lambda(p_2|q).$

Pour (PS.3), on voit que $(p|p) = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 \geq 0$ et $(p|p) = 0$ équivaut à $p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 = 0$
 i.e. $p(0) = p(1) = p(2) = 0$, ce qui équivaut à $p = 0$, vu que seul polynôme de deg ≤ 2 avec 3 racines est le polynôme nul.